Ασκήσεις

1/12/16

18) $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_k$

$$\prod_{i=1}^{k} \nu_i! \,/\, \nu!$$

Λύση

$(S_\nu, \circ)$ $\quad |S_\nu| = \nu!$

$$A_i = \{\sigma \in S_\nu \mid \sigma(x) = x \,,\; x \notin [\sum_{\lambda=1}^{i-1} \nu_\lambda + 1 \,,\, \sum_{\lambda=1}^{i} \nu_\lambda]$$

Αν δείξω για $\nu = \nu_1 + \nu_2$, τότε με επαγωγή βγαίνει και για τα υπόλοιπα

$$\Rightarrow \nu! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu \cdot (\nu - 1) \dots (\nu_1 + \nu_2)$$

Θ.δ.ο. $S_{\nu_1} \times S_{\nu_2} < S_\nu$

$(\sigma, \tau) \in S_{\nu_1} \times S_{\nu_2}$

$$(\sigma, \tau) = \begin{cases} \sigma(i) & 1 \le i \le \nu_1 \\ \nu_1 + \tau(i - \nu) & \nu_1 + 1 \le i \le \nu \; (= \nu_1 + \nu_2) \end{cases}$$

παίρνει μεταθέσεις από το S_{ν_1} $\quad$ —||— το S_{ν_2}

Β' τρόπος

Θ.δ.ο. $S_{\nu_1} \le S_\nu$

$\sigma \in S_{\nu_1}$

$\sigma(i) \in \{1, \dots, \nu_1\}$ $\quad i \in (1, \dots \nu_1)$

$\sigma(\nu_1 + 1) = \nu_1 + 1$

$f : (1, 2, \dots, \nu_1) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{1, \dots \nu_1\}$

γιατί είναι πεπερ. και 1-1

Άρα είναι υποσύνολο.

Άρα ισόμορφος είναι υποομάδα.

$S_{\nu_1} \subseteq S_{\nu_1 + 1}$

Γενικά δε μας φτάνει αυτό να ξέρουμε ότι το $S_{v_1} \subseteq S_{v_1+1}$
Θέλουμε να ξέρουμε και με ποιο τρόπο μπει η S_{v_1}
στην S_{v_1+1}. Θα μπορεί να αφορά το τελευταίο
σταθερό (ή οποιοδήποτε άλλο) κλπ. (v_1+1) τρ.

Όμοια $S_{v_2} \leq S_v$

Άρα

$$S_{v_1} \times S_{v_2} \leq S_v$$

13) $G/Z(G)$ κυκλική τότε ν.δ.ο. G αβελιανή

$gZ(G),\ g \in G$ γεννήτορας της κυκλικής $G/Z(G)$

Έστω $x \in G$ τότε $xZ(G) \in G/Z(G)$

τότε

$$xZ(G) = (gZ(G))^k = g^k Z(G) \Rightarrow$$

$$\underbrace{x^{-1}g^k}_{z} \in Z(G)$$

$$z \in Z(G)$$

$$z = x^{-1}g^k$$

$$x\underbrace{zz^{-1}}_{e} = xx^{-1}g^k z^{-1}$$

$$x = g^k z^{-1}$$

$\in G$ Άρα $\exists k \in \mathbb{Z}$ και $\exists z_x \in Z(G)$ $x = g^k z_x$

$$xy = g^k z_x g^l z_y = g^k g^l z_x z_y$$

$$\overset{z_x, z_y \in Z(G)}{=} g^{k+l} z_x z_y = g^l z_y g^k z_x = yx$$

10) $Y, H \trianglelefteq G$ $\quad Y \cap H = \{1\}$ $\quad ab = ba \ \forall a \in Y, b \in H$

$ab = ba \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \underbrace{(aba^{-1})}_{H}\underbrace{b^{-1}}_{H} \in H \\ \\ \cdot\ \underbrace{a}_{Y}\underbrace{(ba^{-1}b^{-1})}_{Y} \in Y \end{array}\right\} \begin{array}{l} aba^{-1}b^{-1} \in Y \cap H \Rightarrow \\ aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow ab = ba \end{array}$$

8) $K_\nu \leq UT(3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$$K_\nu = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,\alpha}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,b}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,\gamma} \right\rangle$$

Οι παρακάτω ιδιότητες αποδεικνύονται κάνοντας πράξεις με τους πίνακες

$$\gamma^\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{με επαγωγή}$$

$$M \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας την άσκηση 7 βγαίνει αυτό

Στην ουσία θέλω να βγάλω κάπου γ. ή γ υψωμένο σε κάποια δύναμη. Έτσι χρησιμοποιώ τους γεννήτορες και υψώνοντας τους παίρνω τον γ. Μετά θα βρω τον αντίστροφο και χρησιμοποιώντας αυτό βγαίνει ο γ.

Θεώρημα Cayley

G ομάδα $H \subseteq G$ με $[G:H]=k$
$\Rightarrow \exists\ N \trianglelefteq G$ με $N \leq G$ με $G/N \cong \leq S_k$

Άσκηση

$|G| = 10$ $\quad H \leq G$, $|H| = 2$
και $\quad H \triangleleft G \Rightarrow G \cong \leq S_4$
$G \cong \leq \underbrace{S_{|G|}}_{\text{λύση}} = S_{10}$

$\Rightarrow \exists\ N \leq H$ με $N \triangleleft G$ και $G/N \cong \leq S_{[G:H]}$

$N \leq H$, $|H| = 2 \Rightarrow N = \{1\}$ ή $\underbrace{N = H}_{\text{όχι κανονική}}$ και $N \triangleleft G$

$N = \{1\} \Rightarrow G/N = G \cong S_5$

Πρόταση

G: ομάδα $H \leq G$, $[G:H] = v \Rightarrow$
$\exists\ N \triangleleft G$ $N \leq H \Rightarrow [G:N] / v!$
Λύση εφαρμογή του $\oplus$

$G/N \cong \leq S_v \Rightarrow |G/N| / v! \Rightarrow [G:N]\, v!$

Εφαρμογή

$|G| < +\infty \Rightarrow |G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_p^{k_p}$ με
$p_1 < p_2 < \ldots < p_p$ πρώτοι και $k_i > 1$

Άρα
p_1 είναι ο μικρότερος πρώτος που διαιρεί την $|G|$

Υποθέτουμε ότι $H \leq G$ με $[G:H] = p_1 \Rightarrow H \triangleleft G$

① $\Rightarrow \exists\ \Pi \triangleleft O$ με $\Pi \leq y$ και $O/\Pi \cong \leq \mathcal{S}_{p_1}$

Αν $y = \Pi \Rightarrow y$ κανονική.

$|O/\Pi| = [O:\Pi]/p_1!$

$[O:\Pi] = [\underbrace{O:y}_{p_1}][y:\Pi] \Rightarrow [O:\Pi] > p_1$

$[O:\Pi]/p_1$

συγκρίνω τους παρονομ.

$[O:\Pi] = \frac{|O|}{|\Pi|} < \frac{|O|}{|y|} \Rightarrow |\Pi| \leq |y| \Rightarrow$

Επειδή αυτοί διαιρούν την $|O|$ θα υπάρχει $p < p_1$ με $p/|O|$

Αδύνατο!

$O \xrightarrow[\text{ομομορφ}]{\varphi} G$

$O \xrightarrow[\text{επιμορφ}]{\varphi} \varphi(O) \leq G$

$O/\ker\varphi \cong \varphi(O)$

$O/\ker\varphi \cong \varphi(O)$

Δημιουργείται μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των υποομάδων $y_1 \longleftrightarrow \Phi(y_1) \leq \Phi(O)$

$y_1 \leq O/\ker\varphi$

Αυτή η αντιστοίχιση μας δίνει υπομορφίες μεταξύ των υποομάδων της O και της $\Phi(O)$??

Ναι! $\{$ Υποομάδες της G οι οποίες περιέχουν τον $Ker\varphi$ $\}$ $\xleftrightarrow{1-1}$ αν...

$\{$ Υποομάδες της $\Phi(G)$ $\}$

• Έστω $Y, Z \leq G$

$$YZ = \{gh \text{ με } g \in Y \text{ και } h \in Z\} \underset{?}{\leq} G$$

Απάντηση

Όχι γιατί

• Αν Y ή $Z \trianglelefteq G \Rightarrow YZ \leq G$ (τότε είναι υποομάδα)

$(gh)(g'h')$ με $Y \trianglelefteq G$

$(gh)(g'h') = g''h''$

$$ghg^{-1}h^{-1}hh' = gg_1 \underbrace{(hh')}_{\in Z} = g''h''$$

• Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών

G: ομάδα $Y, Z \leq G$ και $Z \trianglelefteq G$

Τότε ορίζεται η $YZ \leq G$ και η YZ/Z

Η ομάδα $YZ/_{Z} \cong Y/_{Y \cap Z}$

Το είχαμε δει ξανά στη γραμμική άλγεβρα με την προσθετική ομάδα στη $Y+Z/_{Z} \cong Y/_{Y\cap Z}$ ως θεώρημα για τη διάσταση

Συμπλήρωμα:
Θεώρημα
$$\dim(Y+Z)+\dim Y\cap Z=\dim Y+\dim Z$$

Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών

$Y, Z \trianglelefteq O$ και $Y \trianglelefteq Z$

Τότε
$$O/Z \cong {}^{O/Y}\!\big/_{Z/Y}$$

Θα έχει ως στοιχεία σύμπλοκα: $O/Z=\{xZ / x\in O\}$

$$O/Y=\{xY/x\in O\} \geq \{zY/z\in Z\}=Z/Y$$

$${}^{O/Y}\!\big/_{Z/Y}=\{a\, Z/Y \mid a\in O/Y\}=$$
$$=\{a\, Z/Y \mid xY,\ x\in O\}=\{(xY)\, Z/Y \mid x\in O\}$$

Ταξινόμηση Αβελιανών Ομάδων

Ερώτημα: Πότε μια ομάδα είναι καρτεσιανό γινόμενο?
Δηλ. πότε $O\cong A\times B$?

Αν $A\le O$, $\exists A'\cong A$ και $A'\le O$
$A'=\{(a,1_B)/a\in A\}\xrightarrow{\cong} A.$

Ερώτημα: Πότε μια ομάδα O είναι $\cong$ με το καρτεσιανό γινόμενο υποομάδων?

Πρόταση

Αν $A, B \trianglelefteq G$ με $A \cap B = \{1\}$ και $G = AB$, τότε $G \cong A \times B$

Απόδειξη

Ορίζεται το $AB \leq G$

$G = AB \iff \forall g \in G \ \exists a \in A$ και $b \in B$

με $g = ab$

1) Είναι μοναδικά τα a και b?
2) $ba \in G = AB \Rightarrow ba = a'b'$

Νδό άσκηση $ab = ba$

Δε ξέρω αν $aa' = a'a$, το μόνο που ξέρω είναι συγκεκριμένα για τα a και b.

Δείχνουμε αυτό ορίζεται G

$\cong : G \to A \times B$

$g = ab \mapsto (a, b)$

Παράδειγμα

1) Klein: $\{1, a, b, ab\} = K$

$\langle a \rangle, \langle b \rangle \leq K$

$K = \langle a \rangle \langle b \rangle \Rightarrow K \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$

$K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

2) $m = p \cdot q$ με $(p, q) = 1$ (πρώτοι μεταξύ τους)

$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$

Ορισμός

Έστω G ομάδα και p: πρώτος

1) Η G καλείται τάξη δύναμης του p αν $|G| = p^k$, $k \in \mathbb{N}$

2) Η G καλείται p ομάδα, αν κάθε στοιχείο έχει τάξη δύναμη του p.

Απόδειξη

Θα εξηγήσουμε γιατί $(1) \Rightarrow (2)$

$\forall a \in G$ με $|G| = p^k \Rightarrow o(a) / p^k \Rightarrow$
$o(a) = p^\ell$

Θ.δ.ο. $(2) \Rightarrow (1)$

Για G αβελιανή

Υποθέτουμε ότι $G = p^k q$ με $(p, q) = 1$

$\exists p'$ πρώτος με $p'/q \Rightarrow \exists a \in G$ με $o(a) = p' \neq p$

Αδύνατο από υπόθεση.

Λήμμα

Έστω G αβελιανή με $|G| = pq$ με $(p,q) = 1$ με $G \cong A \times B$ με $A = \{a \in G$ με $a^p = 1\}$

και $B = \{b \in G$ με $b^q = 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{1\} \\ A, B \trianglelefteq G \end{array}\right\} \Rightarrow G = A \cdot B \Rightarrow G \cong A \times B$$

g τυχαίο, θέλω $g = \underset{A}{\underset{\uparrow}{a}}\,\underset{B}{\underset{\uparrow}{b}}$.

Πως θα γίνει αυτό?

$$(p,q)=1 \iff xp+yq=1$$

$$g' = g^{xp}\, g^{yq}$$

$$(\underset{A}{g^{xp}})^{q} = (\underset{B}{g^{pq}})^{x} = 1$$

Άρα

$G \cong \mathbb{Z}_{p^k} \times \mathbb{Z}_{p^l}$ ή ανάλυση που να μοιάζει

$\left.\underset{\substack{\parallel \\ 2^2}}{\mathbb{Z}_4} \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \right\}$ Άρα έχουν διαφορετική σχέση

__Πρόταση__

Έστω n φυσικός. Με $\delta(n)$ συμβολίζουμε το πλήθος των διαμερίσεων του n.

$$n=1 \qquad \delta(1)=1$$
$$n=2=1+1 \qquad \delta(2)=2$$
$$n=3=1+2=1+1+1 \qquad \delta(3)=3$$
$$n=4=1+3=1+1+2=1+1+1+1=2+2 \qquad \delta(4)=5$$

__Θεμελιώδες Θεώρημα Αβελιανών ομάδων__

1) $|G| = p^k$ με p πρώτος

Όλες οι ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης p^k δίνονται από τις δ διαμερίσεις του k.

Είναι $\delta(k)$: $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

$$\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^{k_l}}$$
$$k_1 \le k_2 \le \dots \le k_l$$

$|G| = 3^5$

$$\delta(5) = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+3 = 2+3 = 4+1 = 5$$

$\mathbb{Z}_{3^5} \not\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^4} \not\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^3} \not\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^2}$

2) $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_\ell^{k_\ell}$ με $p_1 < p_2 < \dots < p_\ell$: πρώτοι
Τότε οι μη ισόμορφες δίνονται από το γινόμενο
των διαμερίσεων $\delta(k_1)\, \delta(k_2) \dots \delta(k_\ell)$

<u>Παράδειγμα</u>

$|G| = 2^2 3 \cdot 5^2$

Πόσες μη ισόμορφες $\delta(3)\,\delta(1)\,\delta(2) = 6$

$\delta(3)$: $1+2 = 3 = 1+1+1$

$\mathbb{Z}_{2^3}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\delta(1) = 1$: $\mathbb{Z}_3$

$\delta(2) = 2 = 1+1$

$\mathbb{Z}_{5^2}$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

$$\mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{2^3 \cdot 5^2 \cdot 3}$$

$$\mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{2^3 \cdot 3} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_{2^3 \cdot 3 \cdot 5} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{15}$$

Homework
Μετά το Θεώρημα Ισομ.
1, 2, 3, 4.